

§4.2 幂级数

一. 幂级数的收敛圆

1. 幂级数

Def. 一个复数列 $\{C_n\}$ 和复数 a 决定下列形式的函数项

$$\text{级数: } C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$$

称为一个幂级数

特别地, $a=0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$

Rem. (1) 收敛域一定不是空集: 在 $z=a$ 处一定收敛

例如: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 在 z 平面上处处收敛

$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ 仅在 $z=0$ 处收敛

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ 在 $|z| < 1$ 上收敛 (绝对收敛但不一致收敛)

2. 幂级数的收敛圆

Thm. (Abel 引理)

若 $\sum C_n z^n$ 在一点 z_0 ($z_0 \neq 0$) 处收敛, 则在圆域 $K: |z| < |z_0|$ 上 $\sum C_n z^n$ 绝对收敛且内闭一致收敛.

若 $\sum C_n z^n$ 在一点 z_0 ($z_0 \neq 0$) 处发散, 则在圆域 $K: |z| > |z_0|$ 上 $\sum C_n z^n$ 发散.

Pf. $\sum C_n z_0^n$ 收敛 $\Rightarrow C_n z_0^n \rightarrow 0 \Rightarrow \{C_n z_0^n\}$ 有界, 记 $|C_n z_0^n| \leq M$.

当 $|z| < |z_0|$ 时, $|C_n z^n| = |C_n z_0^n \cdot (\frac{z}{z_0})^n| \leq M \cdot |\frac{z}{z_0}|^n = M \cdot r^n$ ($r < 1$)

由正项级数判别法知, $\sum |C_n z_0^n|$ 收敛, 则 $\sum C_n z^n$ 绝对收敛.

在 K 内任取一个小闭圆: $|z| \leq \rho$ ($\rho < |z_0|$)

下证 $\sum C_n z^n$ 在 $|z| \leq \rho$ 上一致收敛:

$$|C_n z^n| = |C_n z_0^n \cdot (\frac{z}{z_0})^n| \leq M \cdot (\frac{z}{z_0})^n \leq M \cdot (\frac{\rho}{z_0})^n = M \cdot r^n \quad (0 < r < 1)$$

由 Weierstrass 判别法, $\sum C_n z^n$ 在 $|z| \leq \rho$ 上一致收敛

若 $\sum C_n z^n$ 在 z_0 发散, 当 $|z| > |z_0|$ 时 $\sum C_n z^n$ 显然发散
(由反证法可得)

Cor. 若 $\sum C_n z^n$ 不仅在 $z=0$ 收敛, 也不是在 z 平面上处处收敛,
则存在 $R = \sup \{|z| : \sum C_n z^n \text{ 收敛} \}$ 使 $|z| < R$ 时 $\sum C_n z^n$
绝对且内闭一致收敛, 当 $|z| > R$ 时 $\sum C_n z^n$ 发散, 此时称
 R 为收敛半径

Rem. 若 $\sum C_n z^n$ 仅在 $z=0$ 收敛, 则 $R=0$

若 $\sum C_n z^n$ 在 z 平面上处处收敛, 则 $R=+\infty$

Def. 若 $\sum C_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则称圆域 $K: |z| < R$ 为其
收敛圆.

Rem. 幂级数 $\sum C_n z^n$ 在其收敛圆上是绝对且内闭一致收敛的,
在其外部是发散的. 在圆周 $|z| = R$ 上至少有一点不解析
(奇点).

以上对 $\sum C_n (z-a)^n$ 也成立, 同样可类似定义收敛半径、收敛圆.

3. 收敛半径

Thm. 已知幂级数 $\sum C_n (z-a)^n$ (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{C_{n+1}}{C_n}| = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$

(3) 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

Rem. 这里 $\rho = 0$ 时 $R = +\infty$, $\rho = +\infty$ 时 $R = 0$.

证明同于实分析.

二. 幂级数和函数的解析性

Thm. 设 $\sum C_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 在收敛圆 $|z-a| < R$ 上 $\sum C_n(z-a)^n$ 的和函数一定解析, 且可逐项求任意阶

导数: $f^{(k)}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n(z-a)^n)^{(k)} = C_n k! + \dots$

Pf. 由 Abel 引理和一致收敛的性质, 显然成立.